

Определение резонансных частот по спектру

Стриженова Е.М.

© ООО «АвтоМеханика»

16.04.2019

В данной статье рассматривается задача определения резонансных частот механической системы по спектру и приводится ее решение в программном комплексе EULER.

Определить резонансные частоты динамической системы можно по спектральному разложению отклика системы при подаче на вход случайного сигнала, включающего в себя интересующий диапазон частот. Для этого может быть использован *белый шум*.

Белый шум – стационарный шум, сигнал, имеющий одинаковую спектральную мощность на всем диапазоне задействованных частот. Дискретный белый шум представляет собой последовательность независимых (то есть статистически не связанных друг с другом) чисел. Распределение значений в каждый момент времени при этом может быть произвольным: нормальным, равномерным и т.д. Постоянная составляющая процесса (среднее значение) для белого шума равна нулю.

Для создания белого шума в ПК EULER используется *случайная функция, задаваемая спектром* с постоянной плотностью распределения на *логарифмической* или *линейной шкале спектра*. Логарифмическая шкала может быть выбрана из соображений, что области малых частот представляют больший интерес, чем области высоких частот.

Для иллюстрации определения резонансных частот по спектру рассмотрим однородную балку кругового сечения радиуса $R = 2$ [mm] и длиной $l = 1000$ [mm], материал – сталь (плотность $\rho = 7800$ [kg/m³], модуль упругости $E = 200e9$ [N/m²]). Схема закрепления представлена на Рис. 1.



Рис. 1. Схема закрепления балки

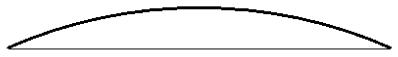
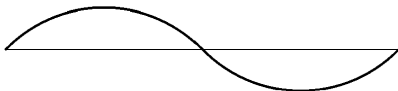

Согласно [1] собственные угловые частоты изгибных колебаний одно-родной балки определяются выражением:

$$\omega_n = \frac{\alpha_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot J}{m}},$$

где α_n – собственные значения, J – момент инерции сечения балки, m – погонная масса. Для рассматриваемой балки эти параметры определяются по формулам: $\alpha_n = n\pi$, $J = \pi R^4/4$, $m = \pi R^2 \rho$.

Собственные значения α_n , угловые частоты изгибных колебаний ω_n и соответствующие частоты $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ для первых 8 собственных форм при данном закреплении представлены в таблице 1.

Таблица 1. Собственные значения, частоты и формы статических поперечных колебаний балки, теоретические значения.

n	α_n	ω_n [rad/s]	f_n [Hz]	Вид/уравнение формы статических колебаний
1	3.142	49.98	7.954	
2	6.283	199.9	31.82	
3	9.425	449.8	71.59	
4	12.57	799.6	127.3	
5	15.71	1249	198.9	
6	18.85	1799	286.3	
7	21.99	2449	389.7	
8	25.13	3199	509.1	$w_n(x) = \sin \alpha_n x$

Для генерации белого шума в данном примере используется шкала спектра с частотой от $f_{Min} = 1$ [Hz] до $f_{Max} = 500$ [Hz], количество полос – 499, что соответствует шагу 1 [Hz] для линейной шкалы спектра. Случайная функция определяется постоянной функцией плотности $f_s(f) = const$. Величина константы вычисляется по среднему квадратическому значению σ на рассматриваемом интервале частот $[f_{Min}, f_{Max}]$. Для обеспечения повторяемости результатов расчета используется псевдослучайное распределение.

В ПК EULER моделируем балку набором 49 жестких звеньев, соединенных пользовательскими шарнирами с вращением вокруг оси Z и двухузловыми силовыми элементами с диагональной матрицей жесткости. Левый конец балки скреплен с инерциальным звеном пользовательским шарниром с разрешенными вращениями, правый конец – также пользовательским шарниром с разрешенными вращениями и перемещением вдоль оси X .

На средний элемент балки (25-й в данном случае) подаем силу, представляющую собой белый шум со средним квадратическим 10 [N], а также момент – тоже белый шум, со средним квадратическим 1 [N m]. В качестве отклика смотрим угол $joint1.fiZ$ в левом закреплении балки (см. Рис. 2).

Файлы модели находятся в папке «Определение резонансных частот по спектру». Модель включает следующие файлы:

- «beam.elr» – модель балки;
- «RESONANCE_FREQUENCY.elr» – корневой проект определения резонансных частот по спектру для модели колебания балки при свободном опирании на концах.

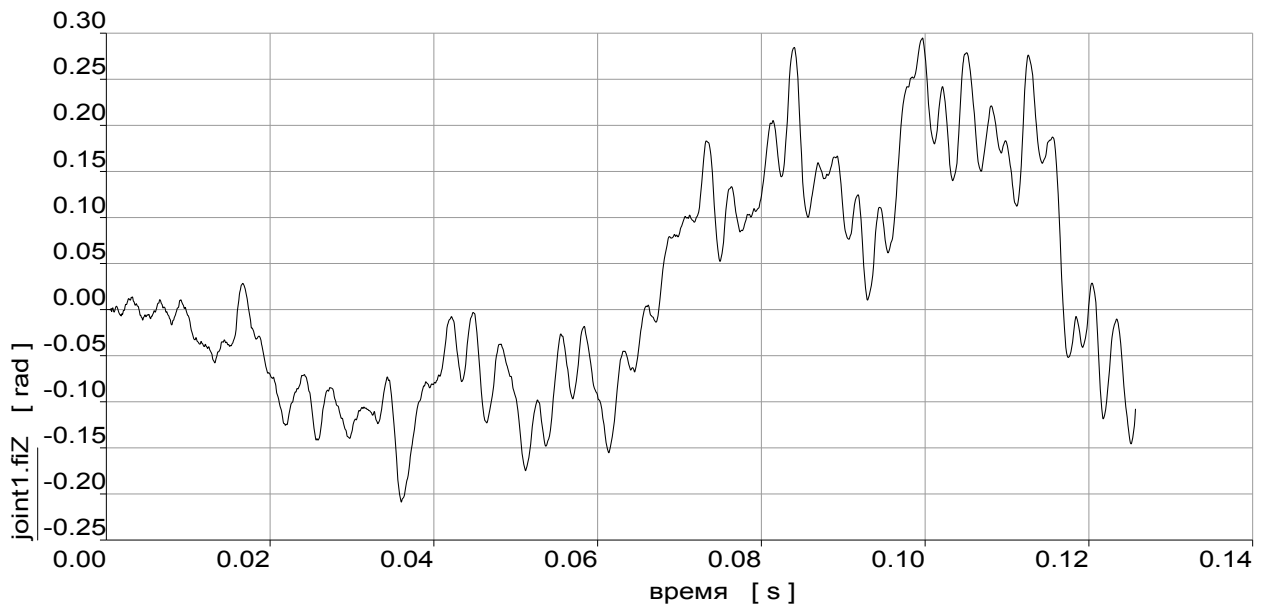


Рис. 2. Угол fiZ в левом закреплении балки ($joint1_fiZ$)

Период колебаний для минимальной частоты $f_1 = 7.954[\text{Hz}]$ составляет $T_1 = 0.1257[\text{s}]$. Для данного датчика рассмотрим спектральное разложение на одном периоде T_1 (см. Рис. 3). Здесь и далее параметр k , определяющий количество точек исходного графика, используемых для разложения ($n = 2^k$), равен 12, в качестве типа аргумента используется частота, а в качестве характеристики спектра – амплитуда (но может быть выбрана и другая характеристика).

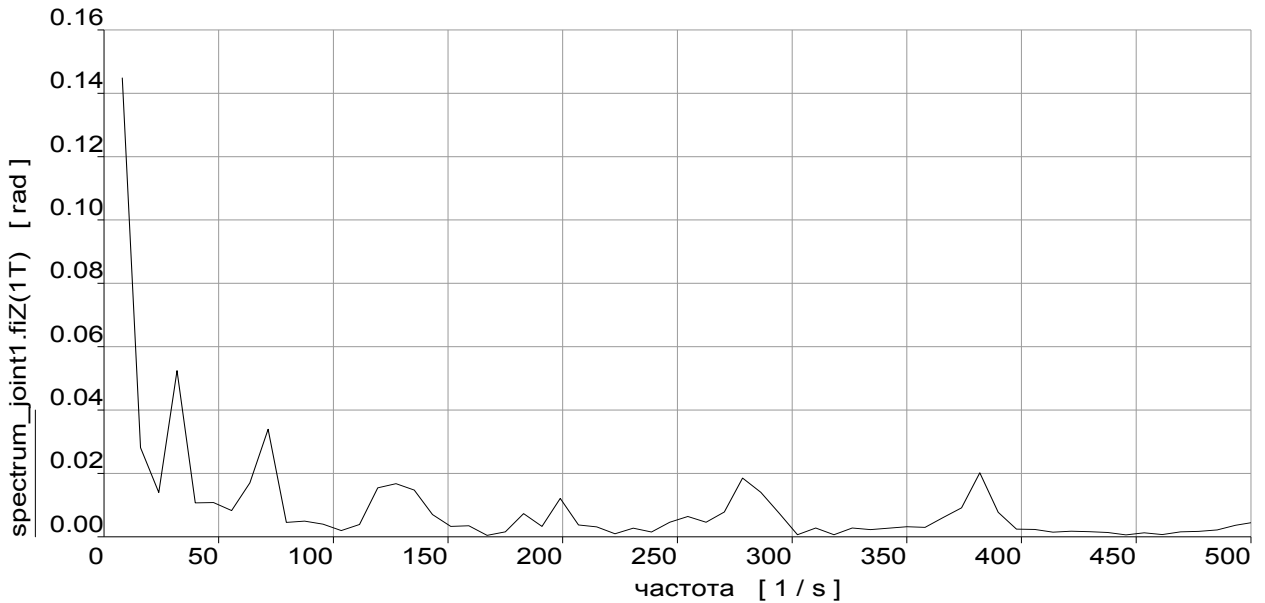


Рис. 3. Спектральное разложение на одном периоде

Как можно видеть, при расчете длительностью один период можно определить с некоторой погрешностью частоты, попадающие в рассматриваемую полосу от 1 [Hz] до 500 [Hz], а именно $f_1 - f_7$ (см. таблицу 1), но некоторые из них видны не достаточно явно.

Приведем для сравнения спектральное разложение на четырех периодах (см. Рис. 4). В этом случае частоты определяются более явно. Обратите внимание, что минимальная частота и дискретизация спектра напрямую зависит от временного интервала, используемого для разложения. Так при использовании четырех периодов минимальная определяемая частота и шаг по частоте будут в 4 раза меньше чем при использовании одного периода!

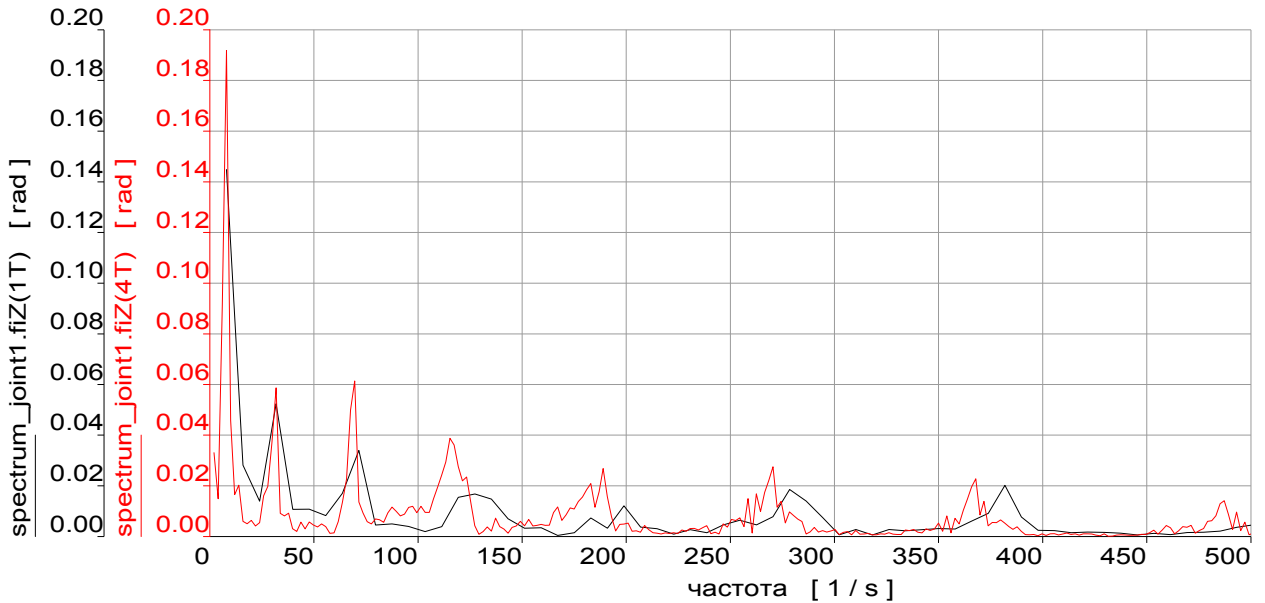


Рис. 4. Сравнение спектрального разложения на одном T_1 и четырех периодах $4 \cdot T_1$

Помимо частот $f_1 - f_7$ при разложении на четырех периодах присутствует еще одна частота около 470-490 [Hz], что может быть связано с неточностью определения частот и близостью границы f_{Max} шкалы спектра к f_8 (обратите внимание, что теоретическое значение $f_8 = 509.1$ [Hz] больше правой границы f_{Max} шкалы спектра, используемой для генерации белого шума).

Так как при разложении в спектр существует возможность дополнить расчетный интервал интервалом с постоянным значением (*Дополнительный постоянный интервал*), то иногда можно определить частоты и по интервалу меньше чем период T_1 . При добавлении постоянного интервала увеличивается детализация спектра по частоте и уменьшается минимальная частота полученного спектра. Обратите внимание, что абсолютные значения характеристик при добавлении интервала постоянного значения при этом изменятся!

Для иллюстрации приведем пример с расчетом на четверти периода $\frac{1}{4}T_1$. Если не использовать дополнительный постоянный интервал, то получим минимальную частоту, представленную в спектре, 31.85 [Hz], что больше теоретического значения $f_1 = 7.954$ [Hz] (см. Рис. 5), следовательно, эту частоту не получится определить. На данном графике определяются частоты f_2 , f_4 и f_7 . Частоты f_5 и f_6 видны неявно.

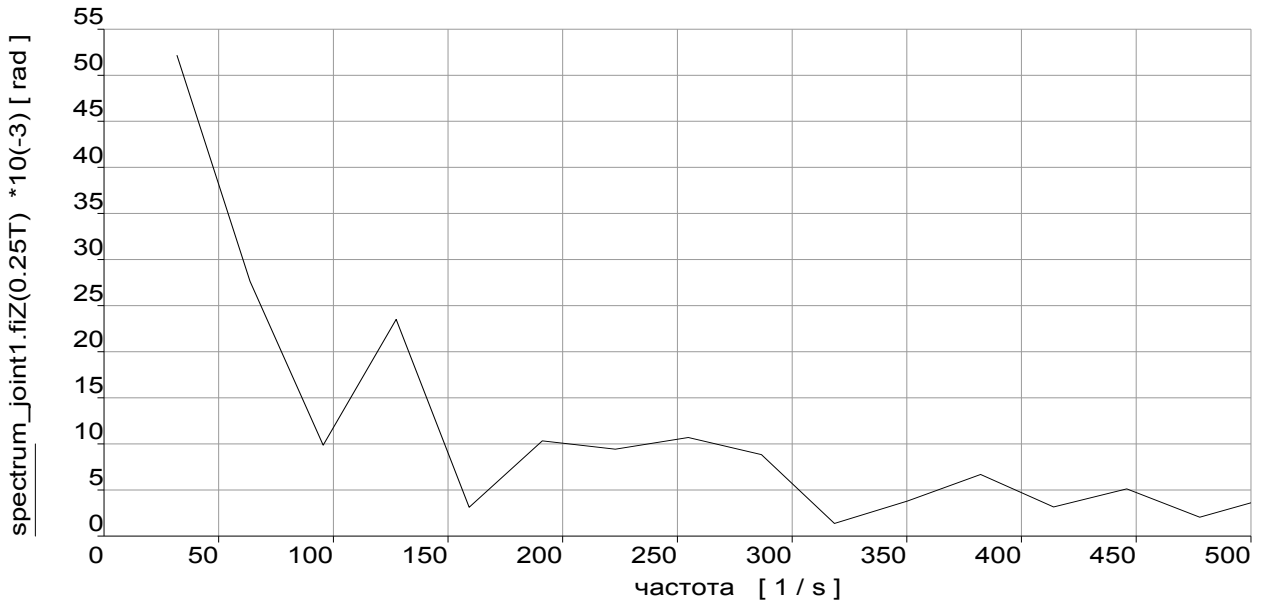


Рис. 5. Спектральное разложение на четверти периода

Если же дополнить интервал постоянным значением длиной $\frac{3}{4}T_1$ (до одного периода в совокупности), то минимальной частотой, представленной в спектре, уже будет 7.955 [Hz] (см. Рис. 6). При этом заметно улучшается дискретизация по частоте, что позволяет определить некоторые другие частоты. Так, например, определяется частота f_3 , ранее не представленная, более явно видны частоты f_5 и f_6 .

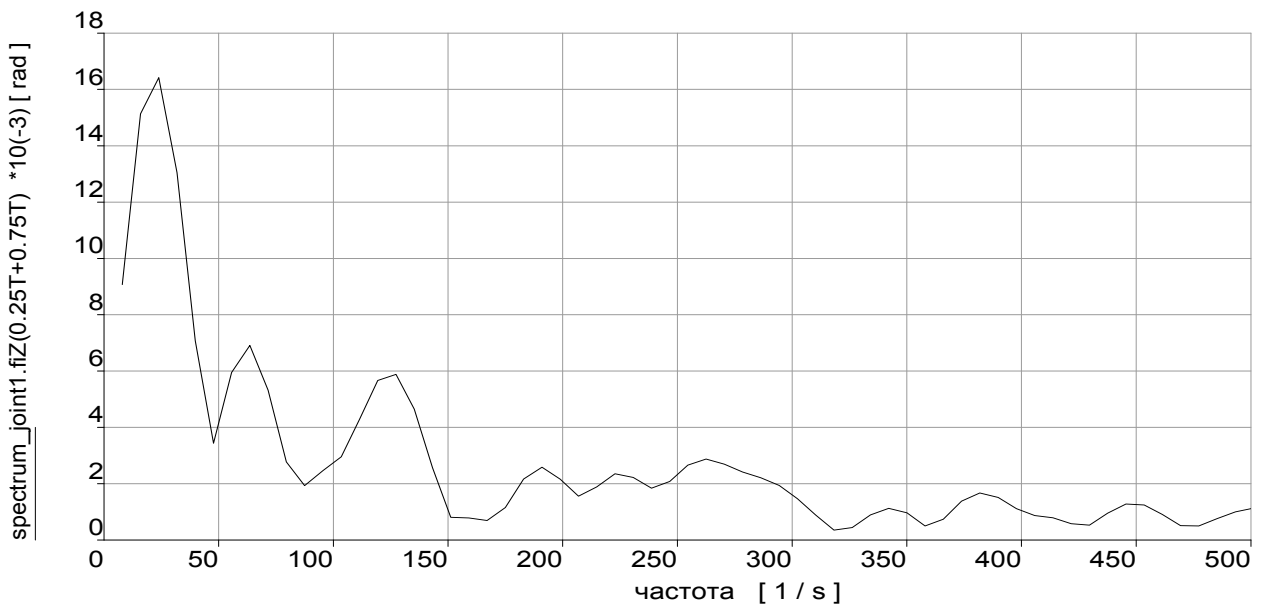


Рис. 6. Спектральное разложение на четверти периода с дополнительным интервалом

Для наглядности сравнения на Рис. 7 представлены оба графика.

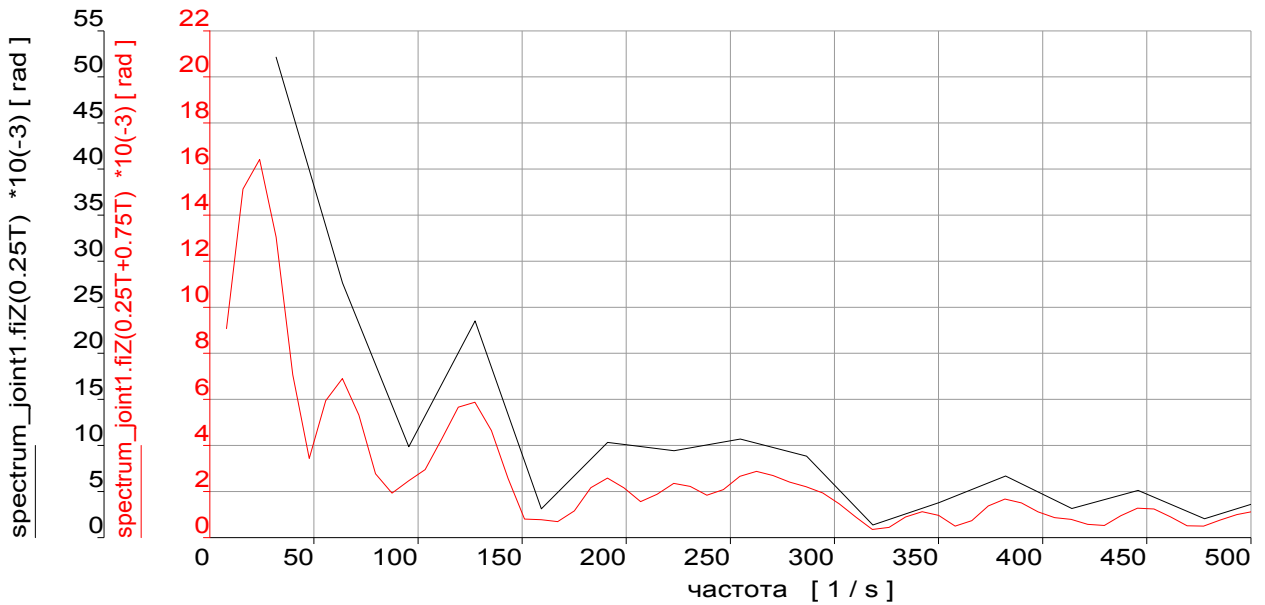


Рис. 7. Сравнение спектрального разложения на четверти периода без дополнительного интервала и с ним

Приведем для сравнения результат, получающийся на одном периоде для случаев, когда при задании белого шума используется линейная или логарифмическая шкалы спектра с одинаковым количеством полос спектра (см. Рис. 8). Можно видеть, что существенных различий нет.

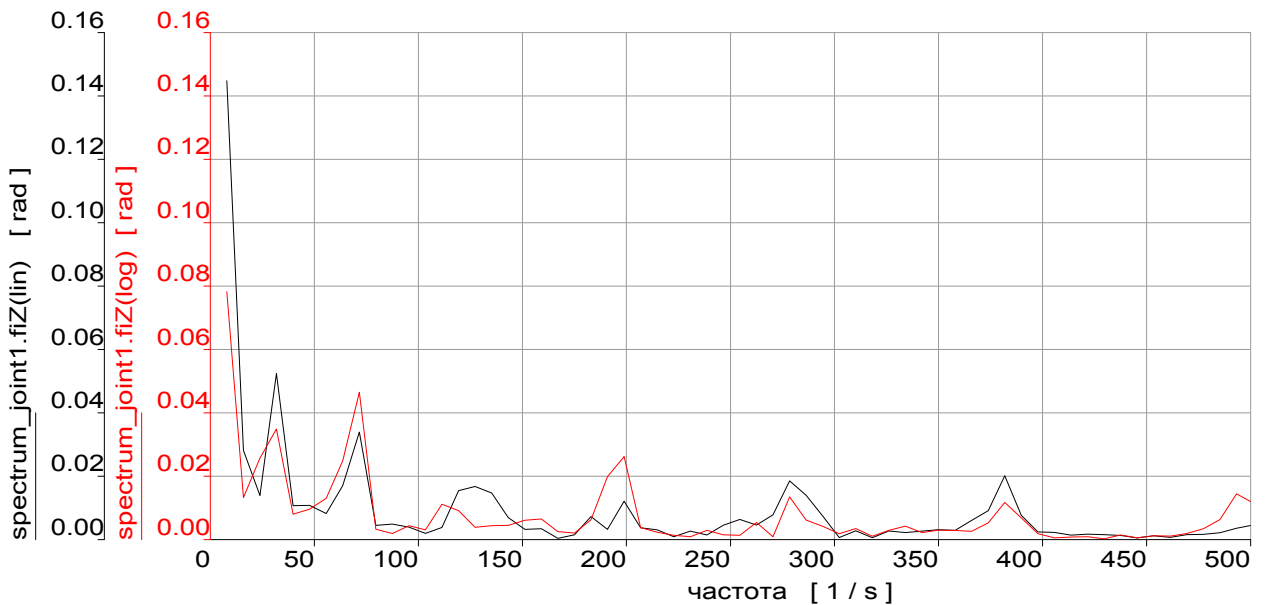


Рис. 8. Сравнение линейной и логарифмической шкалы спектра

Литература

1. Бойков В.Г. Колебания механических систем // Вопросы моделирования – АвтоМеханика. 19.12.2018. – 14 с.