Выбор параметров ПИД-регулятора

Бойков В.Г.

31.10.2023

Классический регулятор, называемый иногда как пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД-регулятор), используется в цепи обратной связи систем автоматического управления для формирования значения параметра управления по имеющимся характеристикам отклонения. Обычно регулятор формирует значение параметра управления как сумму трёх слагаемых, первое из которых пропорционально отклонению, второе – интегралу отклонения, третье – производной отклонения.

Назначение ПИД-регулятора состоит в поддержании заданного значения q_* некоторого регулируемого параметра q с помощью изменения параметра управления u. Значение q_* принято называть уставкой или программным значением регулируемого параметра, разность $\varDelta(t)=\left\{q(t)-q_*(t)\right\}$ – отклонением, невязкой или рассогласованием. В соответствии с изложенным выше значение параметра управления формируется следующим образом

$$u(t)=D+P+I=K_D\cdot\dot{\varDelta}(t)+K_P\cdot\varDelta(t)+K_I\cdot\int_0^t\varDelta(\tau)d\tau \qquad (1)$$

где K_D,K_P,K_I - коэффициенты регулятора; t - время.

Пропорциональная составляющая вырабатывает выходной сигнал, противодействующий отклонению регулируемой величины от заданного значения, наблюдаемому в данный момент времени. Пропорциональная составляющая тем больше, чем больше отклонение.

Дифференциальная составляющая противодействует предполагаемым отклонениям регулируемой величины, которые могут произойти в будущем. Чем быстрее регулируемая величина отклоняется от уставки, тем сильнее противодействие, создаваемое дифференциальной составляющей.

Интегральная составляющая используется для устранения статической ошибки регулирования. Статическая ошибка определяется действием постоянных возмущений и равна такому отклонению регулируемой величины, при котором пропорциональная составляющая сигнала управления стабилизирует ее именно на этом значении. Если система испытывает постоянное внешнее возмущений, то через некоторое время регулируемая величина стабилизируется на заданном значении, сигнал пропорциональной и дифференциальной составляющих будет равен нулю, а выходной сигнал будет полностью обеспечивать интегральная составляющая.

Значения коэффициентов регулятора влияют на устойчивость и качество управления в переходных процессах и при воздействии возмущений. Рассмотрим задачу выбора рациональных значений коэффициентов регулятора.

На практике часто встречаются следующие случаи воздействия управляющего сигнала, точнее параметра управления, на характеристики управляемой системы.

1. Вторая производная регулируемого параметра по времени имеет линейную зависимость от параметра управления

$$\ddot{q} = k_A \cdot u + a_C, \tag{2}$$

где k_A - постоянный (или квазипостоянный) коэффициент ускорения регулируемого параметра; a_C - ускорение регулируемого параметра не зависящее или слабо зависящее от параметра управления.

2. Первая производная регулируемого параметра по времени имеет линейную зависимость от параметра управления

$$\dot{q} = k_V \cdot u + v_C, \tag{3}$$

где k_V - постоянный (или квазипостоянный) коэффициент скорости регулируемого параметра; v_C - скорость регулируемого параметра не зависящая или слабо зависящая от параметра управления.

Рассмотрим первый случай управляющего воздействия на систему, представленный в (2). Можно принять следующие допущения:

1) Ускорение регулируемого параметра a_C мало изменяется по времени по сравнению с изменениями ускорения, зависящими от параметра управления, и поэтому можно принять:

$$\dot{a}_C = 0. \tag{4}$$

2) Программное значение регулируемой величины q_* мало изменяется по времени по сравнению с q, и поэтому можно принять:

$$\ddot{q}_* = 0,$$

и, следовательно,

$$\ddot{q} = \ddot{\Delta}. \tag{5}$$

Подставив (1), (5) в уравнение (2) получаем

$$\ddot{\Delta}-k_A\cdot K_D\cdot\dot{\Delta}-k_A\cdot K_P\cdot\Delta-k_A\cdot K_I\cdot\int_0^t\Delta d\tau-a_C=0. \qquad (6)$$

Продифференцировав (6) по времени с учетом (4) получаем следующее дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dddot{\Delta}-k_A\cdot K_D\cdot\ddot{\Delta}-k_A\cdot K_P\cdot\dot{\Delta}-k_A\cdot K_I\cdot\Delta=0. \qquad (7)$$

Будем определять параметры регулятора K_D,K_P,K_I из условия получения следующего решения уравнения (7)

$$\Delta=C_1\cdot e^{-\lambda t}+C_2\cdot e^{-ht}\cdot\sin\left(\omega_*\cdot t+C_3\right), \qquad (8)$$

где C_1,C_2,C_3 - постоянные, определяемые из начальных условий;

ω_* - угловая частота процесса регулирования;

$\omega_*=\omega\cdot\sqrt{1-\xi^2}$;

ω - собственная угловая частота процесса регулирования;

ξ - коэффициент затухания колебаний процесса регулирования;

$h=\xi\cdot\omega$;

$\lambda=\dfrac{1}{T}$;

T - постоянная времени – время уменьшения статической ошибки регулирования в e раз в стационарном процессе.

Характеристический многочлен для дифференциального уравнения (7), имеющего решение (8), можно представить в следующем виде

$$(x^2+2\xi\omega\cdot x+\omega^2)(x+\lambda)=0,$$

после раскрытия которого получаем

$$x^3+(2\xi\omega+\lambda)\cdot x^2+(\omega^2+2\xi\omega\lambda)\cdot x+\lambda\omega^2=0. \qquad (9)$$

Будем задавать следующие исходные параметры регулятора:

ω - собственная угловая частота процесса регулирования;

ξ - коэффициент затухания колебаний процесса регулирования;

T - время уменьшения статической ошибки регулирования в e раз в стационарном процессе или это же время в относительной форме

$n=\dfrac{T}{T_R}$, где $T_R=\dfrac{2\pi}{\omega}$ - период собственных колебаний процесса регулирования.

Из сравнения (7) и (9) получаем следующие выражения для определения значений коэффициентов регулятора:

$$K_D = -\frac{1}{k_A}\cdot\left(2\xi\omega + \frac{1}{T}\right) = -\frac{\omega}{k_A}\cdot\left(2\xi + \frac{1}{2\pi n}\right); \tag{10}$$

$$K_P = -\frac{1}{k_A}\cdot\left(\omega^2 + \frac{2\xi\omega}{T}\right) = -\frac{\omega^2}{k_A}\cdot\left(1+\frac{\xi}{\pi n}\right); \tag{11}$$

$$K_I = -\frac{1}{k_A}\cdot\frac{\omega^2}{T} = -\frac{\omega^3}{k_A}\cdot\frac{1}{2\pi n}. \tag{12}$$

Для многих практических случаев рационально принять

$\xi = 0.5$;

$n = 4$.

В этом случае

$$K_D \approx -\frac{\omega}{k_A}\cdot 1.04 \ ;$$

$$K_P \approx -\frac{\omega^2}{k_A}\cdot 1.04 \ ;$$

$$K_I \approx -\frac{\omega^3}{k_A}\cdot 0.04 \ .$$

Рассмотрим второй случай управляющего воздействия на систему, представленный в (3). Значение параметра управления в этом случае будем формировать следующим образом

$$u(t) = K_P\cdot\Delta(t) + K_I\cdot\int_0^t \Delta(\tau)d\tau \ . \tag{13}$$

Подставив (13) в (3) и введя допущения, аналогичные первому случаю, получаем

$$\dot{\Delta} - k_V\cdot K_P\cdot\Delta - k_V\cdot K_I\cdot\int_0^t \Delta d\tau - v_C = 0. \tag{14}$$

Продифференцировав (14) по времени с учетом допущения $\dot{v}_C = 0$ получаем следующее дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\Delta} - k_V\cdot K_P\cdot\dot{\Delta} - k_V\cdot K_I\cdot\Delta = 0. \tag{15}$$

Аналогично первому случаю управляющего воздействия на систему получаем следующие выражения для определения значений коэффициентов регулятора:

$$K_P = -\frac{\omega}{k_V} \cdot 2\xi ; \tag{16}$$

$$K_I == -\frac{\omega^2}{k_V} ; \tag{17}$$

Таким образом для определения значений коэффициентов регулятора помимо исходных параметров регулятора ω, ξ, T необходимо задать коэффициент ускорения k_A или скорости k_V регулируемого параметра. Рассмотрим определение этих параметров на следующих примерах.

Рулевое управление автомобилем

Рассмотрим традиционный автомобиль с передними управляемыми колесами, поворот которых осуществляется рулем. В первом приближении можно принять, что управление рулем сводится к боковому перемещению массы автомобиля, создающей нагрузку на передние управляемые колеса. Под регулируемым параметром q будем понимать отклонение центра этой массы от заданной траектории. Можно считать, что он располагается в центре оси передних колес. В качестве параметра управления u будем использовать угол поворота руля. В данной постановке задачи можно считать, что ускорение регулируемого параметра определяется следующим выражением

$$\ddot{q} = \frac{F_y}{m},$$

где m - масса автомобиля, создающая нагрузку на передние управляемые колеса; F_y - боковая сила, действующая на передние управляемые колеса.

Значение боковой силы, действующей на передние управляемые колеса, можно определить следующим выражением

$$F_y = m \cdot g_0 \cdot K_y \cdot \delta,$$

где g_0 - ускорение свободного падения; δ - средний угол увода передних колес; K_Y - относительный коэффициент сопротивления боковому уводу колес, для легковых автомобилей его значение находится в интервале 3.4 – 6.0 [1/rad], для грузовых 1.7 – 5.0 [1/rad].

Средний угол увода передних колес можно определить следующим выражением

$$\delta = \frac{u}{i} - \beta,$$

где u - угол поворота руля; i - передаточное отношение рулевого механизма, равное отношению угла поворота руля к углу поворота колес; β - угол между вектором скорости и продольной осью автомобиля.

Можно считать, что угол β мало изменяется по времени по сравнению с u / i, следовательно ускорение регулируемого параметра определяется следующим выражением

$$\ddot{q} = \frac{g_0 \cdot K_y}{i} \cdot u + \ddot{q}_C .$$

где $\ddot{q}_C$ - ускорение регулируемого параметра, слабо зависящее от угла поворота руля.

Из этого выражения следует, что коэффициент ускорения регулируемого параметра равен

$$k_A = \frac{g_0 \cdot K_y}{i} .$$

Коэффициенты регулятора определяются в соответствии с выражениями (10) - (12).

Регулятор скорости автомобиля

Под регулируемым параметром будем понимать продольную скорость движения автомобиля. Регулирование скорости производится изменением положения сектора (педали) газа s. Скорость изменения регулируемого параметра (продольное ускорение автомобиля) определяется следующим выражением

$$\dot{v} = k_V \cdot s + \dot{v}_C ,$$

где k_V - коэффициент изменения ускорения автомобиля в зависимости от изменения положения сектора газа; $\dot{v}_C$ - продольное ускорение автомобиля, связанное с силами сопротивления.

Будем считать, что положение сектора газа может изменяться от 0 до 1. Значение 0 соответствует выключению передачи момента от двигательной установки автомобиля на колеса. Значение 1 соответствует передаче максимального момента от двигательной установки на колеса. Тогда значение коэффициента k_V можно определить следующим образом

$$k_V = \frac{27.8\ [m / s]}{\mathrm{T}_{100}},$$

где T_{100} - время разгона автомобиля до 100 км/ч (стандартная характеристика автомобиля).

Коэффициенты регулятора определяются в соответствии с выражениями (16) - (17).

Угловая стабилизация летательного аппарата поворотом аэродинамического руля

Рассмотрим канал угловой стабилизации летательного аппарата (ЛА), осуществляемой поворотом аэродинамического руля, обтекаемого внешним потоком. Регулируемым параметром в данном случае может быть угол тангажа, рыскания или крена ЛА. Угол поворота руля γ будем использовать в качестве параметра управления. В первом приближении угловое движение ЛА в плоскости рассматриваемого канала управления описывается следующим дифференциальным уравнением

$$J \cdot \ddot{\varphi} = b \cdot F_y + M_C,$$

где J - момент инерции ЛА относительно оси, перпендикулярной плоскости рассматриваемого канала управления и проходящей через центр масс ЛА; φ - угол положения ЛА в рассматриваемом канале, который и является регулируемым параметром; F_y - подъемная сила, действующая на руль в плоскости рассматриваемого канала; b - плечо подъемной силы руля относительно центра масс ЛА; M_C - прочие моменты, действующие на ЛА в плоскости рассматриваемого канала.

Будем полагать, что вектор подъемной силы руля расположен в плоскости рассматриваемого канала. Значение подъемной силы, действующей на руль, можно определить следующим выражением

$$F_y = q \cdot S \cdot C_y^{\alpha} \cdot \alpha,$$

где q - скоростной напор набегающего потока; S - характерная аэродинамическая площадь руля; C_y^{α} - производная коэффициента подъемной силы руля по углу атаки; α - угол атаки руля относительно набегающего потока.

Скоростной напор набегающего потока

$$q = \frac{\rho \cdot V^2}{2},$$

где ρ - плотность набегающего потока; V - скорость набегающего потока.

Как правило, угол атаки руля относительно набегающего потока можно определить следующим выражением

$$\alpha = \gamma + \alpha_{ЛА},$$

где γ - угол поворота руля; $\alpha_{ЛА}$ - угол атаки ЛА.

Можно считать, что угол $\alpha_{ЛА}$ мало изменяется по времени по сравнению с γ, следовательно ускорение регулируемого параметра определяется следующим выражением

$$\ddot{\varphi} = \frac{b \cdot q \cdot S \cdot C_y^{\alpha}}{J} \cdot \gamma + \ddot{\varphi}_C,$$

где $\ddot{\varphi}_C$ - ускорение регулируемого параметра, слабо зависящее от угла поворота руля.

Из этого выражения следует, что коэффициент ускорения регулируемого параметра равен

$$k_A = \frac{b \cdot q \cdot S \cdot C_y^{\alpha}}{J}.$$

Коэффициенты регулятора определяются в соответствии с выражениями (10) - (12).

Угловая стабилизация ракеты поворотом маршевого двигателя

Рассмотрим канал угловой стабилизации ракеты, осуществляемой поворотом маршевого двигателя. Регулируемым параметром в данном случае может быть угол тангажа или рыскания ракеты. Угол поворота двигателя γ в плоскости рассматриваемого канала будем использовать в качестве параметра управления. В первом приближении угловое движение ракеты в плоскости рассматриваемого канала управления описывается следующим уравнением

$$J \cdot \ddot{\varphi} = b \cdot F_y + M_C,$$

где J - момент инерции ракеты относительно оси, перпендикулярной плоскости рассматриваемого канала управления и проходящей через центр масс ракеты; φ - угол положения ракеты в рассматриваемом канале, который и является регулируемым параметром; F_y - проекция силы тяги двигателя, перпендикулярная продольной оси ракеты и действующая в плоскости рассматриваемого канала; b - расстояние от центра масс ракеты до центра шарнира поворота двигателя; M_C - прочие моменты, действующие на ракету в плоскости рассматриваемого канала.

Проекция силы тяги двигателя определяется следующим выражением

$$F_y = P \cdot \sin(\gamma).$$

где γ - угол поворота двигателя в плоскости рассматриваемого канала; P - тяга двигателя.

Полагая, что углы поворота двигателя относительно невелики, заменим $\sin(\gamma)$ на γ. В этом случае ускорение регулируемого параметра определяется следующим выражением

$$\ddot{\varphi} = \frac{b \cdot P}{J} \cdot \gamma + \ddot{\varphi}_C,$$

где $\ddot{\varphi}_C$ - ускорение регулируемого параметра, слабо зависящее от угла поворота двигателя.

Из этого выражения следует, что коэффициент ускорения регулируемого параметра равен

$$k_A = \frac{b \cdot P}{J}.$$

Коэффициенты регулятора определяются в соответствии с выражениями (10) - (12).

Стабилизация бокового ускорения летательного аппарата поворотом аэродинамического руля

Рассмотрим канал стабилизации бокового ускорения летательного аппарата (ЛА), осуществляемой поворотом аэродинамического руля, обтекаемого внешним потоком. Угол поворота руля будем использовать в качестве параметра управления. Боковое ускорение ЛА, рассматриваемое в качестве регулируемого параметра, определяется следующим уравнением

$$a_N = \frac{F_N}{m},$$

где F_N - сила, действующая на ЛА в боковом направлении; m - масса ЛА.

Значение боковой силы можно определить следующим выражением

$$F_N = q \cdot S_L \cdot C_{Ly}^{\alpha} \cdot \alpha + F_{N0},$$

где q - скоростной напор набегающего потока; S_L - характерная аэродинамическая площадь ЛА; C_{Ly}^{α} - производная коэффициента боковой (подъемной) силы ЛА по углу атаки в рассматриваемой плоскости; α - угол атаки ЛА в рассматриваемой плоскости; F_{N0} - значение боковой силы при нулевом угле атаки.

Продифференцировав дважды выражение для боковой силы получаем

$$\ddot{F}_N = q \cdot S_L \cdot C_{Ly}^{\alpha} \cdot \ddot{\alpha}.$$

С достаточной точностью для процесса управления можно принять

$$\ddot{\alpha} = \varepsilon,$$

где ε - угловое ускорение ЛА в рассматриваемой плоскости.

Значение углового ускорения ЛА можно определить следующим выражением

$$\varepsilon = \frac{b \cdot q \cdot S_R \cdot C_{Ry}^{\alpha}}{J} \cdot \gamma + \varepsilon_C,$$

где b - плечо подъемной силы руля относительно центра масс ЛА; S_R - характерная аэродинамическая площадь руля; C_{Ry}^{α} - производная коэффициента подъемной силы руля по углу атаки; J - момент инерции ЛА относительно оси, перпендикулярной плоскости рассматриваемого канала управления и проходящей через центр масс ЛА; γ - угол поворота руля; ε_C - угловое ускорение ЛА, слабо зависящее от угла поворота руля.

Таким образом ускорение регулируемого параметра, которым является боковое ускорение ЛА, определяется следующим выражением

$$\ddot{a}_N = \frac{q^2 \cdot S_L \cdot C_{Ly}^{\alpha} \cdot b \cdot S_R \cdot C_{Ry}^{\alpha}}{m \cdot J} \cdot \gamma + \ddot{a}_{NC},$$

где $\ddot{a}_{NC}$ - ускорение регулируемого параметра, слабо зависящее от угла поворота руля.

Из этого выражения следует, что коэффициент ускорения регулируемого параметра равен

$$k_A = \frac{q^2 \cdot S_L \cdot C_{Ly}^{\alpha} \cdot b \cdot S_R \cdot C_{Ry}^{\alpha}}{m \cdot J}.$$

Коэффициенты регулятора определяются в соответствии с выражениями (10) - (12).